Revista de Análisis Económico, Vol. 19, Nº 2, pp. 147-156 (Diciembre 2004)

UNA APLICACION DEL ANALISIS NO DIFERENCIABLE A LA ECONOMIA MATEMATICA: CARACTERIZACION DE LA HIPOTESIS DE LIBRE ELIMINACION POR MEDIO DEL CONO NORMAL A LA FRONTERA DEL CONJUNTO

JORGE RIVERA C.*
Universidad de Chile

Abstract

This paper is devoted to study some analytical properties of sets that satisfy the free disposal hypothesis. This hypothesis plays a relevant role in general equilibrium theory, because it is widely used to ensure both the positiveness of equilibrium prices and the efficiency of equilibrium allocation. The main result of this paper is a characterization of this hypothesis in terms of the normal cone to the set at its boundary points.

Keywords: *Free Disposal Hypothesis, Normal Cone, Equilibrium.*

JEL Classification: *C61, D5.*

I. Introducción

La hipótesis de libre eliminación

Recordemos (Debreu, 1959 y Arrow y Hahn, 1971)) que un conjunto $Y \subseteq R^n$ satisface la *hipótesis de libre eliminación*[1] (*HLE*), si para todo $v \in R^n_+$ y para todo $y_0 \in Y$ se cumple que $y_0 - v \in Y$, lo que en términos de conjuntos equivale a decir que $Y - R^n_+ \subseteq Y$.

La interpretación económica de esta hipótesis es la siguiente: si Y es el conjunto de producción de una cierta firma (cosa que supondremos para todo lo que

* Departamento de Economía, Universidad de Chile. E-mail: jrivera@econ.uchile.cl.
El autor agradece los comentarios de Jean-Marc Bonnisseau y la estrecha colaboración de Alejandro Jofré para el desarrollo de este artículo. Asimismo, agradece los comentarios de un árbitro anónimo.

sigue), entonces dado cualquier plan de producción ($y_0 \in Y$) se tiene que cualquier otro vector que contenga o bien una mayor cantidad de factores, o bien una menor cantidad de productos respecto del original, o bien ambas ($y_0 - v \in Y$ con $v \in R_+^n$), también es un plan factible de ser elaborado por la firma.

La relevancia de la *HLE* en economía es indiscutible, siendo una hipótesis ampliamente utilizada en la mayoría de los trabajos donde se estudia la existencia y propiedades del equilibrio general. Como referencias generales se encuentran los trabajos de Debreu (1959) y Arrow y Hahn (1971), donde se utiliza esta hipótesis para estudiar la existencia del equilibrio bajo supuestos de convexidad en la producción (retornos decrecientes a escala); y los artículos de Bonnisseau (1988), Bonnisseau y Cornet (1988) y Brown (1991), donde es utilizada para estudiar el equilibrio bajo supuestos de retornos crecientes a escala en la producción y, finalmente, el trabajo de Khan y Vohra (1987), donde se aplica en un modelo de equilibrio no convexo con bienes públicos.

La importancia de la *HLE* en la teoría de equilibrio general proviene, básicamente, de tres hechos. En primer lugar, ella permite garantizar que, de existir equilibrio de Walras, los precios de equilibrio necesariamente tienen todos sus componentes positivos. Bajo supuestos de convexidad en la producción, el razonamiento para el efecto es muy simple: supongamos que $p^* \in R^n$ denota un precio de equilibrio en una economía, donde al menos una de las firmas del mercado tiene un conjunto de producción $Y \subseteq R^n$ que satisface la *HLE*. Sea $y^* \in R^n$ la correspondiente oferta de la firma en dicho precio. Entonces, por definición, se cumple que $p^* \cdot y^* \geq p^* \cdot y$ para todo $y \in Y$, es decir, $p^* \cdot (y^* - y) \geq 0$ para todo $y \in Y$[2]. Por lo tanto, dado $v \in R_+^n$, de la *HLE* sabemos que $y^* - v \in Y$, con lo cual, aplicando la desigualdad anterior con $y = y^* - v$, se deduce directamente que $p^* \cdot v \geq 0$, para todo $v \in R_+^n$, lo que implica directamente la positividad del vector de precios.

En segundo lugar, la *HLE* es condición suficiente para que las producciones de equilibrio de una firma sean eficientes, es decir, estén en la frontera del conjunto de producción. En efecto, dada la notación anterior, si la producción de equilibrio está en el interior del conjunto de producción (se denotará $y^* \in \operatorname{int} Y$), entonces sabemos que existe una bola de radio $r > 0$ y centro y^* contenida en Y. Por lo tanto, dado $e \in R^n$ un vector cuyos componentes son todos unos, es directo que

$$z = y^* + \frac{r}{2\sqrt{n}} e \in Y$$

Como ex ante sabíamos que el precio de equilibrio tiene sólo componentes positivos, de las definiciones anteriores es fácil ver que $p^* \cdot z > p^* \cdot y^*$ lo que contradice la definición de equilibrio. Por lo tanto, la producción de equilibrio necesariamente debe ser un punto en la frontera del conjunto de producción.

Finalmente, ya en términos más técnicos, la *HLE* permite identificar la frontera del conjunto de producción con una variedad diferenciable. Esta identificación, que en términos matemáticos corresponde a un *homeomorfismo*, posibilita que el estudio de la existencia del equilibrio sea mucho más simple bajo este supuesto que un caso general. Sobre este punto específico se sugiere ver Bonisseau (1988).

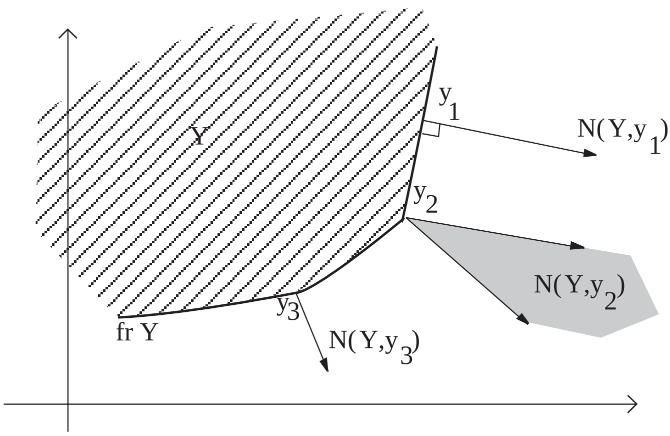
El cono normal

Para ilustrar claramente el aporte de este trabajo es necesario hacer algunas definiciones matemáticas. Dado un *conjunto convexo* no vacío $Y \subseteq R^n$ y dado $y_0 \in Y$ en su frontera (se denotará $y_0 \in frY$), el *cono normal del análisis convexo* a Y en y_0 (ver Rockafellar y Wets, 1998) se define como el siguiente conjunto

$$N(Y, y_0) = \left\{ q \in R^n \middle| q \cdot y_0 \geq q \cdot y, \forall y \in Y \right\}$$

Si la frontera de Y es definida por el gráfico de una función diferenciable, el cono normal anterior corresponde a la semirrecta por el origen cuya dirección está dada por el gradiente de dicha función en el punto. Si la frontera no es diferenciable, entonces el cono normal se "*abre*" permitiendo que nuevos puntos entren al conjunto. La siguiente figura nos muestra el cono normal en algunos puntos de la frontera de un conjunto convexo, donde dicho cono ha sido trasladado al vector donde se hace el cálculo:

FIGURA 1



En y_1 e y_3, la frontera de Y es derivable, razón por la cual el cono normal –trasladado al punto en cuestión– es la semirrecta de la figura. En el punto y_2 la frontera del conjunto no es derivable: el cono normal trasladado a y_2 es el conjunto ennegrecido de la Figura 1.

La relevancia de los conos normales en economía viene del hecho que por su intermedio es posible caracterizar la oferta (y demanda) de una firma (consumidor). En efecto, en el caso convexo anterior, si $y_0 \in Y$ es la oferta de la firma al precio p^*, entonces, por definición, sabemos que para todo $y \in Y$ se cumple que $p^* \cdot y_0 \geq p^* \cdot y$, lo que equivale a decir que $p^* \in N(Y, y_0)$. Así, a partir de esta estrecha relación entre oferta, precio y cono normal es posible entonces definir el *equilibrio económico* en contextos económicos más generales que el convexo. Para más detalles sobre este punto, ver Brown (1991) y sus referencias.

Respecto de lo anterior, un aspecto importante a destacar es que el concepto de cono normal que se utilice para caracterizar el equilibrio es funcional a las características topológicas de los conjuntos donde éste se calcula. El cono normal del análisis convexo *tiene sentido sólo para conjuntos convexos*: calcularlo en conjuntos no convexos puede llevar a que el resultado sea siempre cero o que no esté bien definido.

Para conjuntos más generales que convexos, en la literatura matemática se han introducido una serie de conceptos que, de manera consistente, permiten extender la noción de *normalidad*. Los más ampliamente utilizados en economía son el *cono normal de Clarke*[3] y el de Ioffe-Moruckovich[4].

El cono normal de Clarke se usa para caracterizar el equilibrio económico bajo el supuesto que los conjuntos involucrados poseen una frontera Lipschitziana[5], mientras que el cono normal de Ioffe-Moruckovich se utiliza con conjuntos que sólo satisfacen hipótesis de cerradura. Para más detalles, ver Khan y Vohra (1987), Bonnisseau (1988), Bonnisseau y Cornet (1988) y Brown (1991), junto con las referencias allí contenidas.

La hipótesis de libre eliminación y el cono normal

Si $Y \subseteq R^n$ es un conjunto convexo que satisface la *HLE*, siguiendo el mismo razonamiento anterior donde se prueba la positividad del precio de equilibrio, se puede mostrar que *todos los elementos del cono normal del análisis convexo a Y en cualquier punto de la frontera son positivos*, es decir, para todo $y_0 \in frY$ se tiene que $N(Y, y_0) \subseteq R^n_+$. De esta manera, una condición suficiente para que el precio de equilibrio de una economía tenga todos sus componentes positivos, es que el conjunto de producción de alguna firma verifique la *HLE*.

Dado lo anterior, el objetivo central de este trabajo es saber si el converso de la afirmación anterior es cierta, es decir, poder determinar si un conjunto cerrado que satisface la condición de positividad del cono normal en cualquier punto de la frontera verifica a su vez la *HLE*. Adelantando el resultado central de este trabajo, *la respuesta es afirmativa*, vale decir, se probará que un conjunto cerrado satisface la *HLE*, *si y sólo si* el cono normal de Clarke a su frontera está incluido en R^n_+.

El resultado que se obtendrá es válido para cualquier tipo de conjunto cerrado, no necesariamente convexo[6]. Este hecho estaría demostrando que la HLE es una hipótesis que ex ante nos está entregando garantías sobre la positividad de los precios en el equilibrio. Así, toda vez que asuma la HLE, en el fondo se estaría exigiendo a priori que los precios sean positivos en el equilibrio.

Este trabajo se estructura de la siguiente manera. En la Sección II se introducen conceptos matemáticos destinados a definir el concepto de cono normal para conjuntos cerrados arbitrarios. En la Sección III se presentará, y demostrará, la equivalencia ya mencionada, que es el resultado central de este trabajo y, finalmente, en la Sección IV se entrega una breve conclusión de este trabajo.

II. Preliminares Matemáticos

El objetivo de esta sección es introducir algunos conceptos matemáticos del análisis no diferenciable (*nonsmooth analysis*). La complejidad de todo lo que sigue proviene, única y exclusivamente, de la necesidad de definir el concepto de normalidad para conjuntos más generales que los convexos. En tal sentido, la noción más utilizada en economía es aquella del *cono normal de Clarke*, cuyo detalle se puede encontrar en Clarke (1983) y Rockafellar y Wets (1998). Aplicaciones de este concepto en economía, específicamente al estudio del equilibrio general sin convexidad en la producción, se pueden encontrar en Bonnisseau (1988) y Bonnisseau y Cornet (1988). Además, en Brown (1991) se puede encontrar un resumen general del tema.

En lo que sigue, que una sucesión $a_k \in R^n, k \in N$, converja al valor a_0 será denotado como $a_k \to a_0$. Si la sucesión es de números reales, la notación $a_k \to a_0^+$ corresponde a decir que la sucesión converge al límite indicado, pero sólo tomando valores mayores que a_0 (convergencia por la derecha).

Si denotamos por $\| \cdot \|$ la norma Euclidiana en R^n, la función distancia a un con junto cerrado $Y \subseteq R^n$ se define como $d(\cdot, Y): R^n \to R$ tal que $d(x,Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$, es decir, la longitud del camino más corto para ir de x a Y. La proyección de un vector $x \in R^n$ sobre Y se define como aquel vector, que denotaremos $proy_Y(x) \in Y$, tal que $d(x,Y) = \|x - proy_Y(x)\|$, es decir, el vector en Y que define el camino más corto entre x e Y.

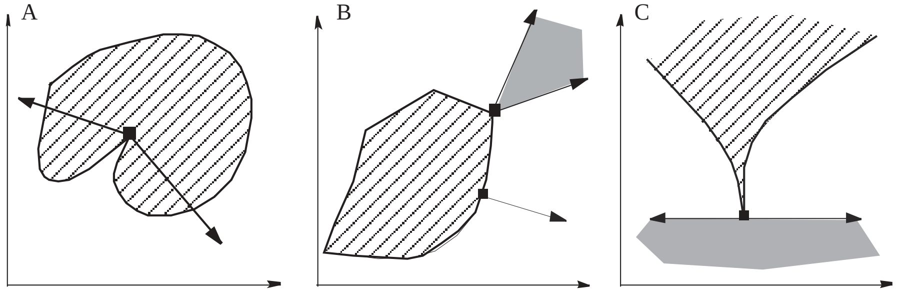
Dado $Y \subseteq R^n$ un conjunto cerrado e y_0 un punto de su frontera, el *cono tangente de Clarke a Y en y_0* se define como[7]:

$$T_C(Y, y_0) = \left\{ q \in R^n \middle| \begin{array}{c} \forall t_k \to 0^+, \forall y_k \in Y, y_k \to y_0, \exists q_k \to qt \cdot qy_k + t_k q_k \in Y, \\ con\ k \in N\ suficientemente\ grande \end{array} \right\}$$

Con esto, el *cono normal de Clarke* a Y en $y_0 \in frY$ se define como el *polar* del cono tangente, es decir,

$$N_C(Y, y_0) = \left[T_c(Y, y_0)\right]^+ \equiv \left\{ p \in R^n \middle| p \cdot q \le 0, \forall q \in T_c(Y, y_0) \right\}.$$

La siguiente figura ilustra el cono normal de Clarke a diversos conjuntos (los achurados) en algunos de los puntos de su frontera. En **A**, el cono normal del análisis convexo no está definido en el punto indicado, mientras que el de Clarke es igual a las dos semirrectas indicadas. En **B** (caso convexo) el cono normal del análisis convexo coincide con el de Clarke en los puntos indicados (vector de la figura y región gris). Finalmente, en **C**, el cono normal del Clarke es el semi-espacio ennegrecido de la figura.



Las propiedades básicas de los conos normal y tangente de Clarke que son usadas en este trabajo, se resumen en la siguiente proposición.

Proposición 2.1

a. $N_C(Y,y) = \left[\operatorname{int} T_c(y,y)\right]^+$

b. Dado $p \in N_C(Y,y)$, *existen sucesiones* $t_k \to 0^+, p_k \to p, y_k \to y$, *con* $y_k \in y$, *tales que para cada* $y' \in Y$ *se cumple que* $p_k \cdot \left(y' - y_k\right) \leq \dfrac{1}{2t_k}\left\|y' - y_k\right\|^2.$

La parte *a.* es directa de la definición. La parte *b.* se llama *fórmula normal proximal* para el cono normal de Clarke y su demostración se puede encontrar en Loewen (1993).

III. El Resultado Principal

El teorema que vamos a demostrar es la caracterización de la hipótesis de libre eliminación en términos de la positividad del cono normal al conjunto en sus puntos frontera.

Teorema 3.1. *Un conjunto cerrado y no vacío* $Y \subseteq R^n$ *satisface la hipótesis de libre eliminación si y sólo si para todo* $y \in frY$ *se cumple que* $N_C(Y,y) \subseteq R^n_+$.

Demostración

a. Condición necesaria: $Y \subseteq R^n$ *satisface la hipótesis de libre eliminación entonces para todo* $y \in frY$ *se cumple que* $N_C(Y,y) \subseteq R^n_+$.

Supongamos que $Y \subseteq R^n$ satisface la hipótesis de libre eliminación y sea $p \in N_C(Y,y)$. De la fórmula normal proximal (Proposición 2.1.b.) sigue que existen sucesiones $t_k \to 0^+, p_k \to p, y_k \to y$, *con* $y_k \in Y$, tales que para cada $y' \in Y$ se cumple que $p_k \cdot (y' - y_k) \leq \frac{1}{2t_k}\|y' - y_k\|^2$. Luego, dado e_i, i = 1, 2, …n, el i *– ésimo* vector de la base canónica de R^n y dado $\alpha \in R_+$ cualquiera, por *HLE* el vector $y' = y_k - \alpha\, t_k e_i$ es también un elemento de Y. Por lo tanto, usando la fórmula normal proximal con y' anterior, sigue que:

$$p_k \cdot (y' - y_k) \leq \frac{1}{2t_k}\|y' - y_k\|^2 \Rightarrow p_k \cdot (y_k - \alpha\, t_k e_i - y_k) \leq \frac{1}{2t_k}\|y_k - \alpha\, t_k e_i - y_k\|^2,$$

de lo cual se deduce

$$p_k \cdot (\alpha\, t_k e_i) \leq \frac{1}{2t_k}\|\alpha\, t_k e_i\|^2 \Rightarrow p_k \cdot e_i \geq -\frac{\alpha}{2}.$$

Puesto que α es arbitrario y $(p_k \cdot e_i)$ es el i *– ésimo* componente de p_k, deducimos que éste debe ser positivo. Finalmente, como $p_k \to p$, se tiene que p debe tener todos sus componentes positivos, con lo cual concluye la prueba de la condición necesaria.

b. Condición suficiente: si para todo $y \in frY$ *se cumple que* $N_C(Y,y) \subseteq R^n_+$ *entonces* $Y \subseteq R^n$ *satisface la hipótesis de libre eliminación.*

Para la demostración, en primer lugar notemos que la cerradura de Y implica que $Y - R^n_+ \subseteq Y$ se cumple si y sólo si $Y - R^n_{++} \subseteq Y$[8]. Por lo tanto, negando la hipótesis y considerando lo anterior, se tiene que deben existir $y_0 \in Y$ y $p_0 \in R^n_{++}$ tales que $y_0 - p_0 \notin Y$. A este respecto, se tienen dos casos a considerar, a saber, que y_0 sea un punto de la frontera de Y o que y_0 sea un punto del interior de Y.

Caso 1: $y_0 \in frY$

Por hipótesis sabemos que $N_C(Y, y_0) \subseteq R_+^n$, con lo cual, de la definición de cono tangente, sigue que $T_C(Y, y_0) \supseteq -R_+^n$, lo que a su vez implica que $-p_0 \in T_C(Y, y_0)$. Más aún, puesto que todos los componentes de p_0 los hemos supuesto estrictamente positivos, es directo entonces que $-p_0 \in \operatorname{int} T_C(Y, y_0)$.

Definamos ahora $\overline{Y}$ como la intersección de Y con el segmento de recta en R^n cuyos extremos son[9] y_0 e $(y_0 - p_0)$, es decir,

$$\overline{Y} = Y \cap [y_0, y_0 - p_0].$$

Dado lo anterior, sea $q_0 \in \overline{Y}$ la proyección de $(y_0 - p_0)$ sobre $\overline{Y}$. Por lo tanto, existe $t_0 \in [0,1[$ tal que $q_0 = t_0(y_0 - p_0) + (1 - t_0)y_0$. De esta manera, es directo que

$$y_0 - p_0 - q_0 = y_0 - p_0 - t_0(y_0 - p_0) - (1 - t_0)y_0 = -(1 - t_0)p_0$$

con lo cual $\|y_0 - p_0 - q_0\| = (1 - t_0)\|p_0\|$. Por otro lado, del hecho que $-p \in \operatorname{int} T_C(Y, y_0)$, Clarke (1983), sigue que existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $t \in [0, \varepsilon[$ se cumple que $q_0 + t(-p) \in \overline{Y}$. Por lo tanto, del hecho que:

$$(y_0 - p_0) - (q_0 + t(-p_0)) = (y_0 - p_0 - q_0) + tp_0 = -(1 - t_0)p_0 + tp_0 = (-1 + t_0 + t)p_0$$

se sigue que

$$\|(y_0 - p_0) - (q_0 + t(-p_0))\| = (1 - t_0 - t)\ \|p_0\| < (1 - t_0)\ \|p_0\|,$$

lo que obviamente contradice la definición de proyección, pues hemos encontrado otro vector $(q_0 + t(-p))$ cuya distancia a $(y_0 - p_0)$ es menor que aquélla que tenía la proyección. Con esto queda probado el Caso 1.

Caso 2: $y_0 \in \operatorname{int} Y$.

Definamos L como el segmento de recta en R^n cuyos extremos son y_0 e $(y_0 - p_0)$, es decir,

$$L = [y_0, y_0 - p_0] = \{z = \lambda y_0 + (1 - \lambda)(y_0 - p_0), \lambda \in [0,1]\}.$$

Puesto que $y_0 \in Y$ e $(y_0 - p_0) \notin Y$, es claro entonces que L debe intersectar en algún punto a la frontera de Y. Sea entonces $\bar{z} \in frY \cap L$. Luego, existe $\overline{\lambda} \in]0,1]$ tal que:

$$\bar{z} = \bar{\lambda} y_0 + \left(1-\bar{\lambda}\right)\left(y_0 - p_0\right) = y_0 - \left(1-\bar{\lambda}\right) p_0 .$$

Ahora bien, de un cálculo simple es claro que $y_0 - p_0 = \bar{z} = \bar{\lambda} p_0$. Por lo tanto, si suponemos que $y_0 \in \operatorname{int} Y$, hemos probado que existe un punto $\bar{z}$ en la frontera de Y y un vector estrictamente positivo, $\bar{\lambda} p_0$, tal que su diferencia no está en Y, lo que, por lo demostrado en el Caso 1 anterior, no es posible. En consecuencia queda demostrado completamente el Teorema 3.1.

IV. Conclusiones

El resultado central de este artículo nos muestra que el supuesto de libre eliminación no es una hipótesis artificial dentro del modelo de equilibrio general. En esencia corresponde a exigir que ex ante los precios de equilibrio sean positivos, toda vez que estos existan. Las propiedades de los conjuntos que satisfacen la *HLE* están entonces estrechamente ligadas a las propiedades topológicas de su frontera.

Notas

1 *Free disposal hypothesis* en inglés.

2 Puesto que los vectores de los conjuntos de producción contienen tanto *inputs* como *outputs* de la firma, el producto interno del precio con el vector de producción nos entrega el beneficio neto de la firma.

3 Ver Clarke (1983) y Rockafellar y Wets (1998).

4 Ver Rockafellar y Wets (1998).

5 Es decir, para conjuntos donde la función que define la frontera es localmente Lipschitz. Que una función $f : R^n \to R$ sea localmente Lipschitz alrededor de $\bar{x}$ corresponde a decir que existe una constante k > 0 y una bola $B(\bar{x}, \delta)$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq k \cdot \|x - y\|, \forall x, y \in B(\bar{x}, \delta)$.

6 Es importante señalar que los conjuntos que satisfacen la *HLE* cumplen con las condiciones matemáticas que permiten definir el cono normal de Clarke en forma adecuada. Por lo tanto, la proposición que se va demostrar se puede enunciar correctamente como válida para cualquier conjunto cerrado.

7 Ver Clarke (1983) y Rockafellar y Wets (1998).

8 Recordemos que R^n_+ es el conjunto de los vectores cuyos componentes son no negativos, mientras que R^n_{++} es el conjunto de los vectores cuyos componentes son estrictamente positivos.

9 El segmento de recta que une $x, y \in R^n$ se define como $[x, y] = \{z = \lambda x + (1-\lambda) y, \lambda \in [0,1]\}$.

Referencias

ARROW, K. y F. HAHN (1971). *General Competitive Analysis*. Holden Day, San Francisco.

BONNISSEAU, J. M. (1988). "On Two Existence Results of Equilibria in Economies With Increasing Returns". *Journal of Mathematical Economics*, 17 (2-3), pp. 193-207.

BONNISSEAU, J. M. y B. CORNET (1988). "Existence of Equilibria When Firms Follows Bounded Losses Pricing Rules". *Journal of Mathematical Economics*, 17 (2-3), pp. 103-118.

BROWN, D. (1991). "Equilibrium Analysis With Non-Convex Technologies". *Handbook of mathematical economics*, Editado por W. Hildenbrand y H. Sonnenschein. North Holland. Vol. IV, pp. 1963-1995.

CLARKE, F. (1983). *Optimization and Non-Smooth Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York.

DEBREU, G. (1959). *Theory of Value, an Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*. Wiley. New York.

KHAN, A. y R. VOHRA (1987). "An Extension of the Second Welfare Theorem to Economies With Nonconvexities and Public Goods". *The Quarterly Journal of Economics,* 102 (2), pp. 223-241.

LOEWEN, P. (1993). *Optimal Control Via Non-Smooth Analysis*. CRM Proceedings and Lectures Notes. Vol. 2. American Mathematical Society.

ROCKAFELLAR, R.T. y R. WETS (1998). *Variational Analysis*. Springer Verlag.